

雾膜软件

惯性 IMU 超宽带测距 UWB 组合导航仿真 Matlab 代码包

版本 20241029

1. 概述

本代码包的主要功能是计算惯性导航和 uwb 测距的组合导航。开发语言 MATLAB。

运行 creatdata.m 生成仿真数据。仿真数据包括陀螺仪数据、加速度计数据、测距数据、参考位置、参考速度。基站位置、误差等均可根据需要修改。现在的基站位置是

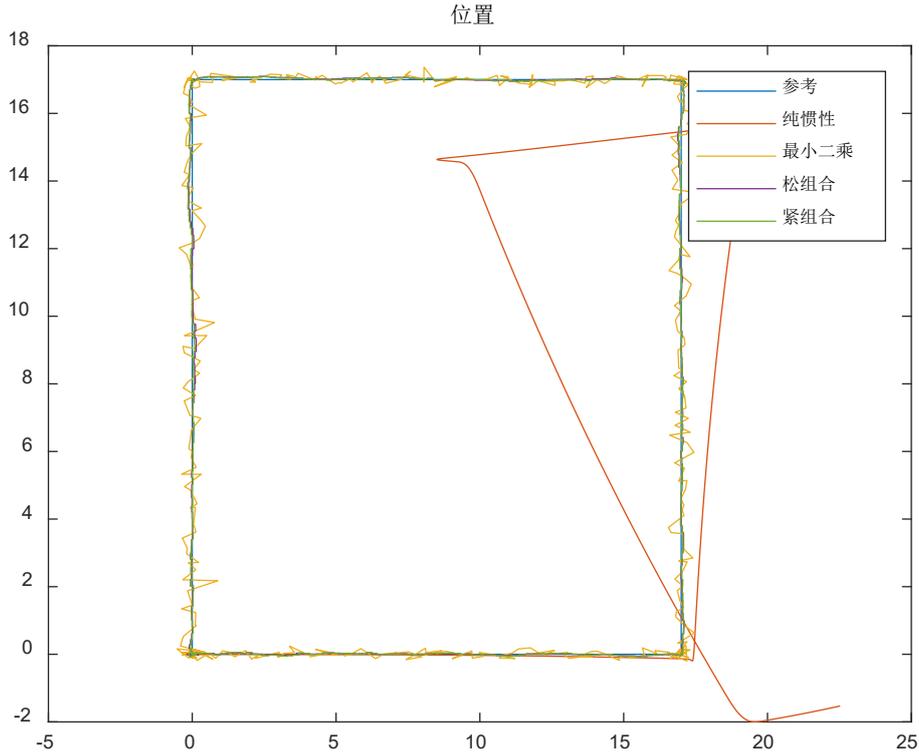
```
pbase=[-5, 30, 0;  
        -5, -30, 0;  
        10, 10, 5;  
        10, -10, 5;  
        20, 30, 0;  
        20, -30, 0]';
```

运行 instance1.m 解算纯惯性导航。运行 instance2.m 解算纯 uwb 导航，采用非线性最小二乘法。运行 instance3.m 解算惯性 uwb 松组合导航，即采用 uwb 解算的位置作为卡尔曼滤波的观测量。运行 instance4.m 解算惯性 uwb 紧组合导航，即采用 uwb 测距作为卡尔曼滤波的观测量。运行 instance5.m 绘图比对。

其中，组合导航的主要工作流程为：

```
初始化  
while(1)  
{  
    惯性导航  
    更新状态方程  
    if(收到 uwb 测距数据)  
    {  
        计算 ekf  
        补偿误差  
    }  
    存储数据  
}
```

2. 运行结果



3. 惯性导航原理

3.1. 坐标系

载体系 b 定义为与载体固定连接的坐标系，不妨取 xyz 轴为右前上。

地理系 t 定义为与载体处地面重合的坐标系，不妨取 xyz 轴为东北天。

导航坐标系 n 是表示导航结果的坐标系。在航海、航空领域中，为了避免船只、飞机通过南北极附近时 n 系快速旋转导致导航结果异常， n 系会与 t 系有一定的夹角。在普通导航系统中，可以不虑载体通过南北极的情况，因此选取 n 系与 t 系重合以使导航算法简化。

平台坐标系 p ，是平台式导航系统中传感器的指向，或者是捷联式导航系统中数学换算后的传感器的指向。理想情况下 p 系与 n 系重合；但是由于陀螺仪误差等因素，真实的 p 系与 n 系有误差角。捷联式导航系统希望把加速度换算到 n 系中，但是实际上是换算到了 p 系中。在一般的导航计算中，不必刻意区分 p 系和 n 系，但是在分析误差时需要引入 p 系。

地球坐标系 e ，是和地球固连的坐标系，不妨规定 z 轴沿着南北极方向指向北， x 轴指向 0 经度方向。

惯性参考系 i 。惯性参考系主要用于描述概念。惯性导航中一般不需要真正地在惯性参考系中投影，所以不必在惯性参考系中规定坐标系。

3.2. 方向和单位

惯性测量单元为 3 轴陀螺仪和 3 轴加速度计。定义 x 向东、 y 向北、 z 向天为姿态 0 位置。旋转方向和角速度方向满足右手法则，即右手握住坐标轴，大拇指位于坐标轴正向，则其余四个手指指向旋转正向。姿态的欧拉角旋转顺序定义为依次绕 z 、 x 、 y 旋转。

若无特殊说明，一般采用国际单位制。角度单位为 rad ，角速度单位为 rad/s ，速度单位 m/s ，加速度单位 m/s/s 。

3.3. 坐标变换

完整地描述角速率、姿态、加速度、速度、位移等需要 3 个坐标系。坐标系 β 相对于坐标系 α 的变化量 x 在坐标系 γ 的投影表示为 $x_{\alpha\beta}^{\gamma}$ 。例如，地球自转在地理系的坐标为

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^t = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_e \cos L \\ \omega_e \sin L \end{bmatrix} \quad (3-1)$$

其中 ω_e 是地球自转角速率， L 是纬度。这是地球系 e 相对于惯性系 i 的转动在地理系 t 的投影。在这种表示方法下，一些简单的计算规则如下：

同一个坐标系内表示的变量符合向量加法规则，即

$$\mathbf{x}_{AB}^{\gamma} + \mathbf{x}_{BC}^{\gamma} = \mathbf{x}_{AC}^{\gamma} \quad (3-2)$$

同一个变量在不同坐标系的换算可以用矩阵表示。

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta}^{\mu} = \mathbf{C}_{\gamma}^{\mu} \mathbf{x}_{\alpha\beta}^{\gamma} \quad (3-3)$$

坐标变换矩阵表示旋转关系。例如二维的坐标变换矩阵为

$$\mathbf{C}_n^b = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

三维的坐标旋转有3个自由度，可以看作是类似形式矩阵相乘。

坐标变换矩阵是正交矩阵，逆矩阵是原矩阵的转置

$$\mathbf{C}_{\mu}^{\gamma} = (\mathbf{C}_{\gamma}^{\mu})^{-1} = (\mathbf{C}_{\gamma}^{\mu})^T \quad (3-5)$$

3.4. 姿态更新

三维空间有3个旋转自由度。类似式(3-4)，依次绕三个坐标轴旋转，则坐标变换矩阵为

$$\mathbf{C}_n^b = \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & -\sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & \sin \theta_x \\ 0 & -\sin \theta_x & \cos \theta_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_z & \sin \theta_z & 0 \\ -\sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

把坐标变换矩阵表示为绕坐标轴分别旋转三次，三次旋转的角度即为欧拉角。旋转的顺序并不是唯一的，也可以定义旋转顺序不同的欧拉角。同一个坐标变换矩阵，在不同的旋转顺序定义下，有不同的欧拉角角度；同样的旋转角度，按照不同的坐标轴顺序旋转，会得到不同的坐标变换矩阵；这个性质称为姿态角的不可交换性。所以使用欧拉角描述姿态时必须规定清楚旋转顺序。本书中欧拉角定义为：初始状态右前上（xyz）三轴位于东北天方向，依次绕上轴旋转偏航角，绕右轴旋转俯仰角，绕前轴旋转横滚角。

如果每次旋转的角度很小，则坐标变换矩阵近似为

$$d\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -d\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ d\theta_y & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d\theta_x \\ 0 & -d\theta_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d\theta_z & 0 \\ -d\theta_z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

略去二阶小量，则有

$$d\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & d\theta_z & -d\theta_y \\ -d\theta_z & 1 & d\theta_x \\ d\theta_y & -d\theta_x & 1 \end{bmatrix} \quad (3-8)$$

上式表示了坐标旋力矩阵与旋转角度的关系。如果旋转角度很小，则不必考虑旋转顺序。为了表示的方便，引入角增量反对称矩阵

$$[\boldsymbol{\theta}] = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3-9)$$

那么姿态矩阵更新公式为

$$\mathbf{C}_b^i(t+T) = \mathbf{C}_b^i(t) \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\mathbf{I} + \frac{[\boldsymbol{\theta}_{ib}^b]}{k} \right)^k = \mathbf{C}_b^i(t) \exp([\boldsymbol{\theta}_{ib}^b]) \quad (3-10)$$

其中 \exp 表示自然常数 e 为底数的指数函数。 $\mathbf{C}_b^i(t)$ 是上一时刻的姿态矩阵， $\mathbf{C}_b^i(t+T)$ 是下一时刻的姿态矩阵。上式即姿态更新公式。

利用麦克劳林公式，能得到更便于计算的如下公式

$$\exp([\boldsymbol{\theta}]) = \mathbf{I} + \frac{\sin|\boldsymbol{\theta}|}{|\boldsymbol{\theta}|} [\boldsymbol{\theta}] + \frac{1 - \cos|\boldsymbol{\theta}|}{|\boldsymbol{\theta}|^2} [\boldsymbol{\theta}]^2 \quad (3-11)$$

如果旋转角度较小，同时为了避免分母为 0，可以采用如下近似公式

$$\exp([\boldsymbol{\theta}]) \approx \mathbf{I} + [\boldsymbol{\theta}] \quad (3-12)$$

根据上述若干公式，使用陀螺仪数据计算得到姿态。

实际导航系统中，为了防止计算误差导致姿态矩阵失去正交性，也为了减少计算量，往往采用四元数代替姿态矩阵进行姿态更新。四元数定义为

$$\mathbf{q} = \left[\cos \frac{\theta}{2} \quad u_x \sin \frac{\theta}{2} \quad u_y \sin \frac{\theta}{2} \quad u_z \sin \frac{\theta}{2} \right]^T \quad (3-13)$$

其中 θ 是旋转的角度， $[u_x \quad u_y \quad u_z]^T$ 是旋转轴的单位向量。

四元数也可以表示为

$$\mathbf{q} = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{A} \sin \frac{\theta}{2} \quad (3-14)$$

其中 \mathbf{A} 是旋转轴的单位向量。

四元数姿态微分方程为

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad (3-15)$$

引入 4 维的角增量矩阵

$$[\boldsymbol{\theta}] = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_x & -\theta_y & -\theta_z \\ \theta_x & 0 & \theta_z & -\theta_y \\ \theta_y & -\theta_z & 0 & \theta_x \\ \theta_z & \theta_y & -\theta_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3-16)$$

四元数更新姿态的公式为

$$\mathbf{q}(t+T) = \left(\cos \frac{|\boldsymbol{\theta}|}{2} \mathbf{I} + \frac{\sin \frac{|\boldsymbol{\theta}|}{2}}{|\boldsymbol{\theta}|} [\boldsymbol{\theta}] \right) \mathbf{q}(t) \quad (3-17)$$

3.5. 速度和位置更新

采用低精度三维惯性导航算法。与原版惯性导航算法相比，忽略了地球的自转和曲率，以局部直角坐标代替经纬度表示位置。

原版的姿态计算公式

$$\boldsymbol{\omega}_{nb}^b = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \mathbf{C}_n^b (\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \quad (3-18)$$

简化为

$$\boldsymbol{\omega}_{nb}^b = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \quad (3-19)$$

原版的速度计算公式

$$\dot{\mathbf{V}}_{en}^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}_b - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n \times \mathbf{V}_{en}^n - \boldsymbol{\omega}_{en}^n \times \mathbf{V}_{en}^n + \mathbf{g} \quad (3-20)$$

简化为

$$\dot{\mathbf{V}}_{en}^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}_b + \mathbf{g} \quad (3-21)$$

原版的位置计算公式

$$\dot{L} = V_y / R_m \quad (3-22)$$

$$\lambda = \frac{V_x}{R_p \cos L} \quad (3-23)$$

简化为

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{v} \quad (3-24)$$

4. 非线性最小二乘法

根据测距值算位置的方法是非线性最小二乘法。

考虑一个方程数比未知数个数更多的线性方程组

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \quad (4-1)$$

最小二乘法的解为

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A}) \setminus (\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{b}) \quad (4-2)$$

为了求解非线性过约束方程组，将最小二乘法和牛顿法合并使用，即得到非线性最小二乘法：通过偏微分，用线性关系逼近非线性关系，然后迭代计算最小二乘法。

距离为

$$r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} \quad (4-3)$$

非线性最小二乘法需要利用偏导数矩阵，代替线性最小二乘法的系数矩阵。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial x} & \frac{\partial r_1}{\partial y} & \frac{\partial r_1}{\partial z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial r_i}{\partial x} & \frac{\partial r_i}{\partial y} & \frac{\partial r_i}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (4-4)$$

根据上述公式迭代多次即可求解。

5. 组合导航

5.1. 原理概述

连续计算惯性导航；当检测到 **uwb** 测距数据时，采用扩展卡尔曼滤波修正导航误差。

卡尔曼滤波可以理解为：根据方差求权重，做加权平均。

原始的卡尔曼滤波适用于线性系统。因为导航系统不是线性的，所以采用扩展卡尔曼滤波。扩展卡尔曼滤波的主要方法是，选用误差量，利用一阶微分近似为线性系统。滤波得到误差量估计值后，立刻补偿误差。

5.2. 卡尔曼滤波

比较复杂的系统中，一方面系统具有多个自由度，另一方面被测量随着时间而变化。因此用状态空间方程的形式描述系统的关系，并把上述的加权平均数计算方法用矩阵表示，则得到卡尔曼滤波。

系统表示为：

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{x}_{k-1} + \boldsymbol{w}_{k-1} \quad (5-1)$$

$$\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{H} \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}_k \quad (5-2)$$

其中是 \boldsymbol{x} 状态量，是希望获得而又难以准确测量的量。第一个公式描述了被测量的变化关系，这里是离散形式。 \boldsymbol{z} 表示量测量，是能测量得到但是包含随机误差的量。第二个公式描述了量测量与状态量的关系。 \boldsymbol{w} 和 \boldsymbol{v} 是随机噪声。有的系统中 \boldsymbol{w} 和 \boldsymbol{v} 会乘以系数矩阵，但是对于普通的组合导航系统， \boldsymbol{w} 和 \boldsymbol{v} 可以不乘以系数矩阵。

状态量的变化也可以描述为连续方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}_k = \boldsymbol{F} \boldsymbol{x}_{k-1} \quad (5-3)$$

如果采样间隔足够小，离散方程与连续方程的关系为

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{F}T \quad (5-4)$$

其中 T 为采样间隔， \boldsymbol{I} 为单位矩阵。

卡尔曼滤波的解算过程就是根据 \mathbf{z} 估计 \mathbf{x} ，具体方法如下：

如果不考虑误差，前后时刻的 \mathbf{x} 具有关系

$$\hat{\mathbf{X}}_{k|k-1} = \Phi \hat{\mathbf{X}}_{k-1} \quad (5-5)$$

$\hat{\mathbf{X}}_{k-1}$ 是前一时刻 \mathbf{x} 的估计值， $\hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}$ 是推算的后一时刻的 \mathbf{x} 。但是因为误差的存在，这个推算并不准确，需要根据 \mathbf{z} 修正，因此取

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}) \quad (5-6)$$

其中 \mathbf{K}_k 是反映权重的滤波增益。这个增益由如下方法计算

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \Phi \mathbf{P}_{k-1} \Phi^T + \mathbf{Q} \quad (5-7)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (5-8)$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{P}_{k|k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R} \mathbf{K}_k^T \quad (5-9)$$

其中 \mathbf{P} 、 \mathbf{Q} 、 \mathbf{R} 分别是 $\hat{\mathbf{X}}$ 、 \mathbf{w} 、 \mathbf{v} 的方差矩阵。

上述公式给出了线性系统的卡尔曼滤波方法。非线性系统可以局部微分而近似为线性系统，采用扩展卡尔曼滤波方法解算。扩展卡尔曼滤波中的 \mathbf{x} 是误差量，扩展卡尔曼滤波获得误差量后，及时修正，使得误差量总维持在较小范围内；在误差量较小时，局部微分得到的线性系统与原始的非线性系统基本一致，卡尔曼滤波能取得较好效果。

代码包采用闭环反馈校正的方式，滤波后修正惯导误差，所以标准卡尔曼滤波中的 $\hat{\mathbf{X}}_{k-1}$ 取0，简化后的计算公式为

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \mathbf{K}_k \mathbf{z}_k \quad (5-10)$$

用扩展卡尔曼滤波进行组合导航的步骤是：1.进行惯性导航解算。2.有测距信息时，比较惯性导航与测距的结果偏差，即 \mathbf{z} 。3.用卡尔曼滤波计算 \mathbf{x} 。4.根据 \mathbf{x} 修正惯性导航的结果，并返回步骤1。

5.3. 状态方程

取扩展卡尔曼滤波的状态量 \mathbf{x} 为15维向量，包含位置误差、速度误差、姿态误差、陀螺仪零偏、加速度计零偏各3各自由度

简化版的惯性导航的矩阵 \mathbf{F} 如下。

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 & \mathbf{F}_{av} & \mathbf{O}_3 & \mathbf{C}_b^n \\ \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 & -\mathbf{C}_b^n & \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 \end{bmatrix} \quad (5-11)$$

其中每个子矩阵都是3阶方阵， \mathbf{O}_3 表示0矩阵。

反映姿态误差对速度误差影响的子矩阵为

$$\mathbf{F}_{av} = \begin{bmatrix} 0 & -f_U & f_N \\ f_U & 0 & -f_E \\ -f_N & f_E & 0 \end{bmatrix} \quad (5-12)$$

其中 f_E 、 f_N 、 f_U 是换算到n系的加速度计数值，即不扣除重力的比力信息。

$$\mathbf{f}_n = \begin{bmatrix} f_E \\ f_N \\ f_U \end{bmatrix} = \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}_b \quad (5-13)$$

导航计算机每次收到惯性数据时，要计算 \mathbf{F} 矩阵，并更新 Φ 矩阵。

5.4. 观测方程

5.4.1. 松组合

松组合的观测量即位置误差。

观测矩阵即裁剪的单位矩阵。

$$\mathbf{H} = [\mathbf{I} \quad \mathbf{0}] \quad (5-14)$$

5.4.2. 紧组合

紧组合观测量为距离。距离为

$$r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} \quad (5-15)$$

观测矩阵即距离的偏微分，

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{x_A - x_B}{r_{AB}} & \frac{y_A - y_B}{r_{AB}} & \frac{z_A - z_B}{r_{AB}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5-16)$$

6. 著作权和服务

6.1. 工作原理参考什么资料

参考实体书《组合导航应用笔记》，东南大学出版社，2025年。

讲解视频，哔哩哔哩视频网搜索“大胡子刘师傅”。

6.2. 著作权声明

本店保留著作权。

电路、说明书、全部附属代码（以下简称本代码包）仅限于学习和研究用途的少量使用；包含改编文件、写入嵌入式系统的编译后程序，所有副本总计不得超过5份。

本代码包有偿使用。

严禁转卖或公开发布本代码包的全部或一部分。

大规模应用本代码包需要额外取得本店的授权。

对于违反上述要求的用户，本店有权要求停止销售、撤稿、赔偿损失等。

6.3. 服务内容

赠送30分钟语音答疑服务，用于解决较为复杂的疑问。

赠送长期文字答疑，用于解决简单的、零散的疑问。

答疑服务仅限直接购买人本人使用。答疑服务不能转让、不能共享。用户需要保留购买凭证截图；丢失购买凭证的，本店可以不提供答疑服务；不是从本店购买的，而是从其他渠道获得代码包的，不提供答疑服务。

本商品技术含量较高，本店不保证能在限时内解答所有疑问。有需要的用户，可以付费购买额外的语音答疑服务。

本店可提供少量的数据判读服务。但是大量的数据判读服务需要额外收费。较为复杂的数据处理，或者定制化修改代码，可能需要额外收费。

上述服务可能需要排队，本店不能保证服务的实时性。

6.4. 联系方式

西安市雁塔区雾膜软件开发站

销售、答疑、定制开发：

微信：（扫码）

雾膜软件



电子邮箱: braun@wmsoft.wang

网站: <http://wmsoft.xyz>