

雾膜软件

传递对准仿真 Matlab

版本 20240824

1. 内容介绍

1.1. 概述

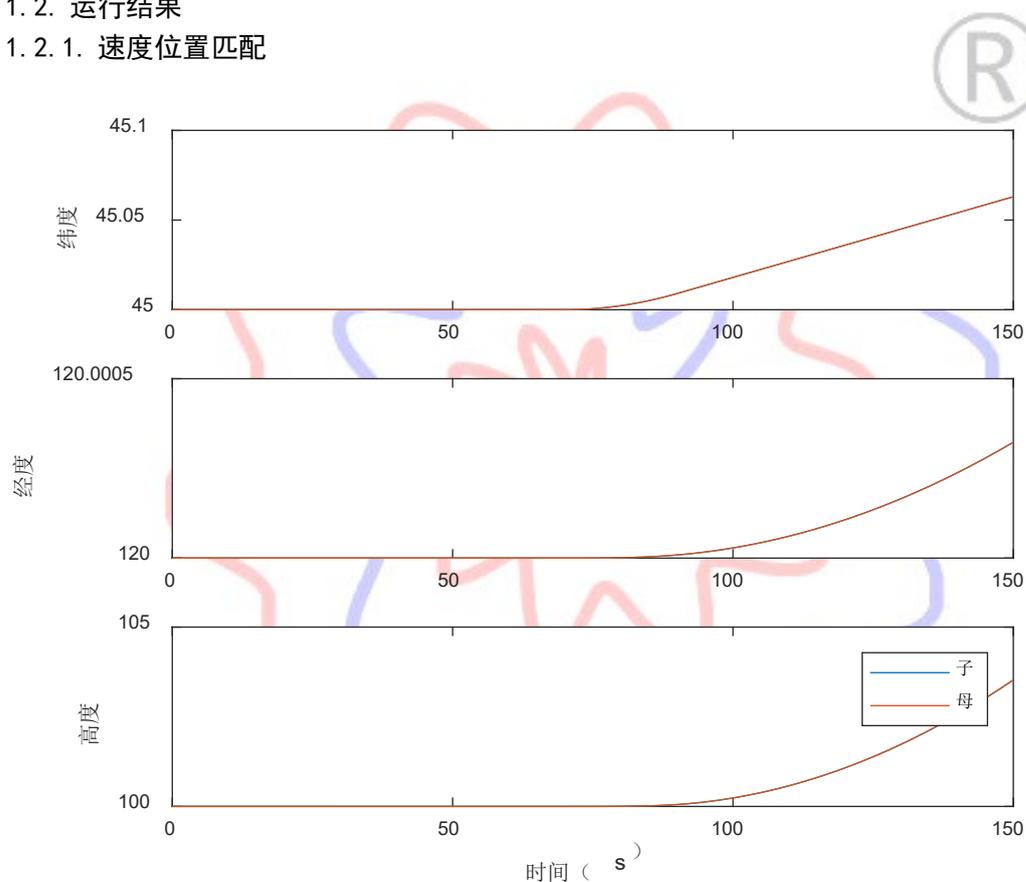
代码包包含 2 个文件夹，分别为速度位置匹配，和姿态匹配，两种方法的传递对准。

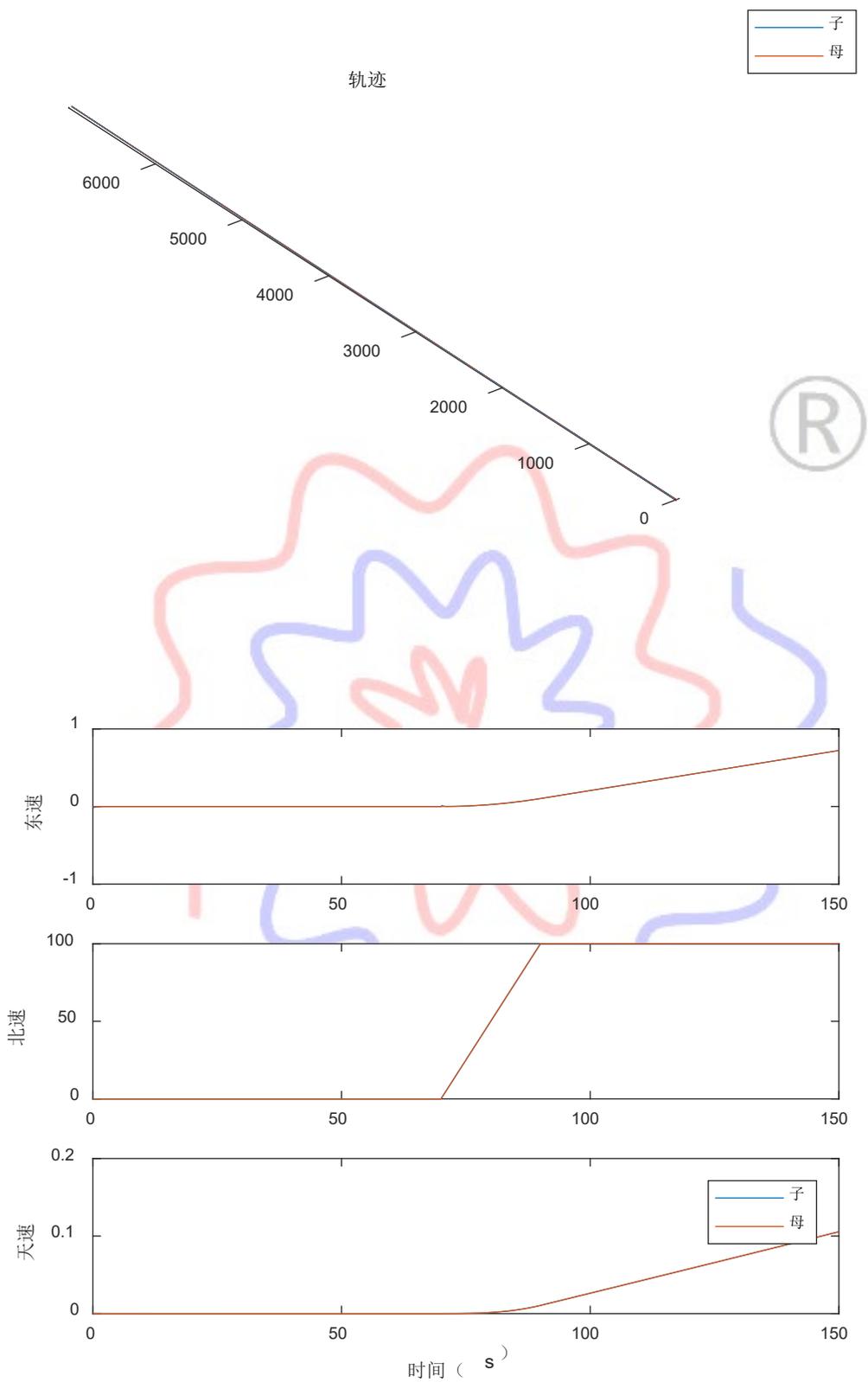
直接运行 `creatdata.m` 生成仿真数据。包括子惯导角速度、加速度、参考姿态，主惯导姿态、速度、位置。

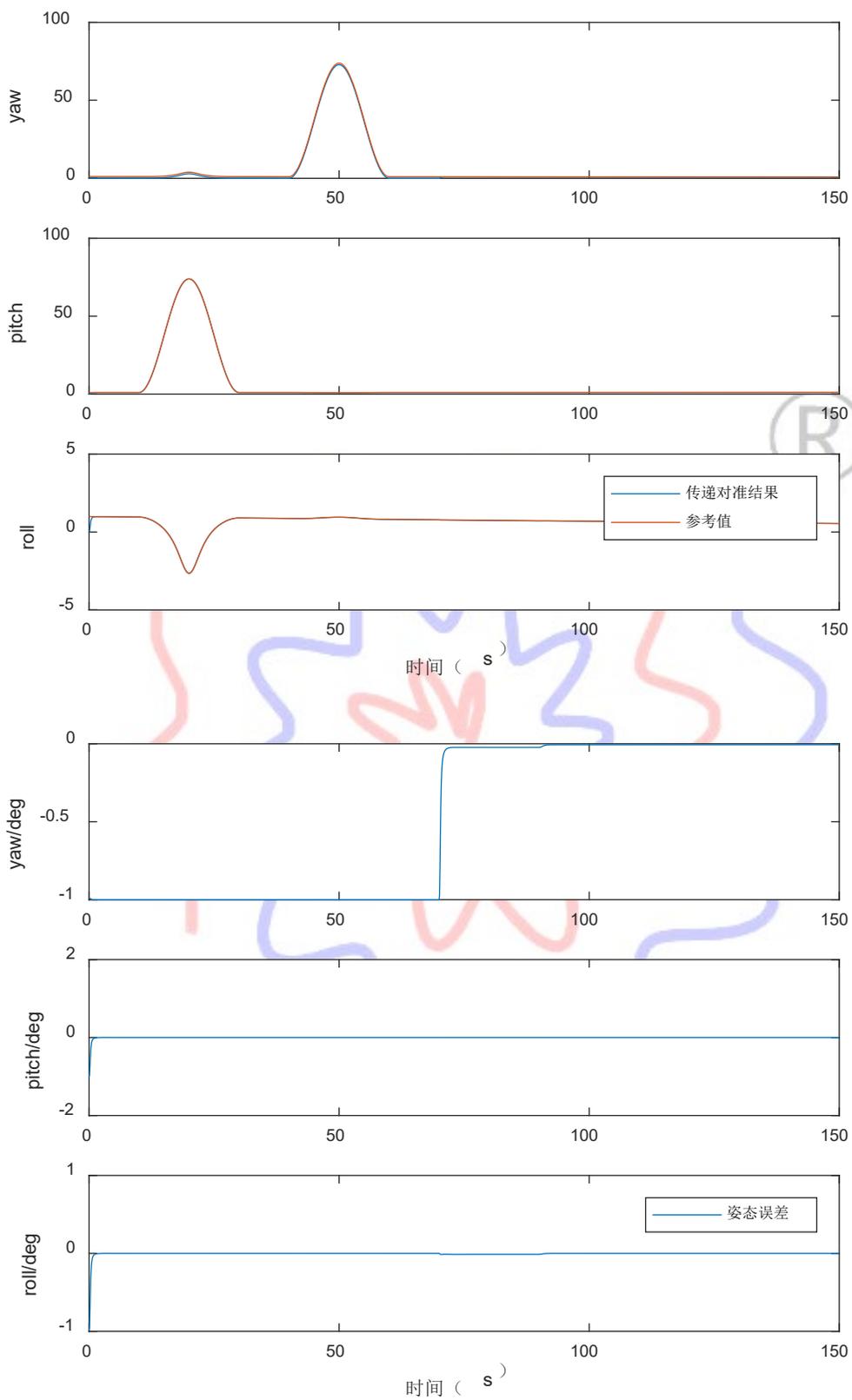
直接运行 `instance1.m` 计算传递对准。

1.2. 运行结果

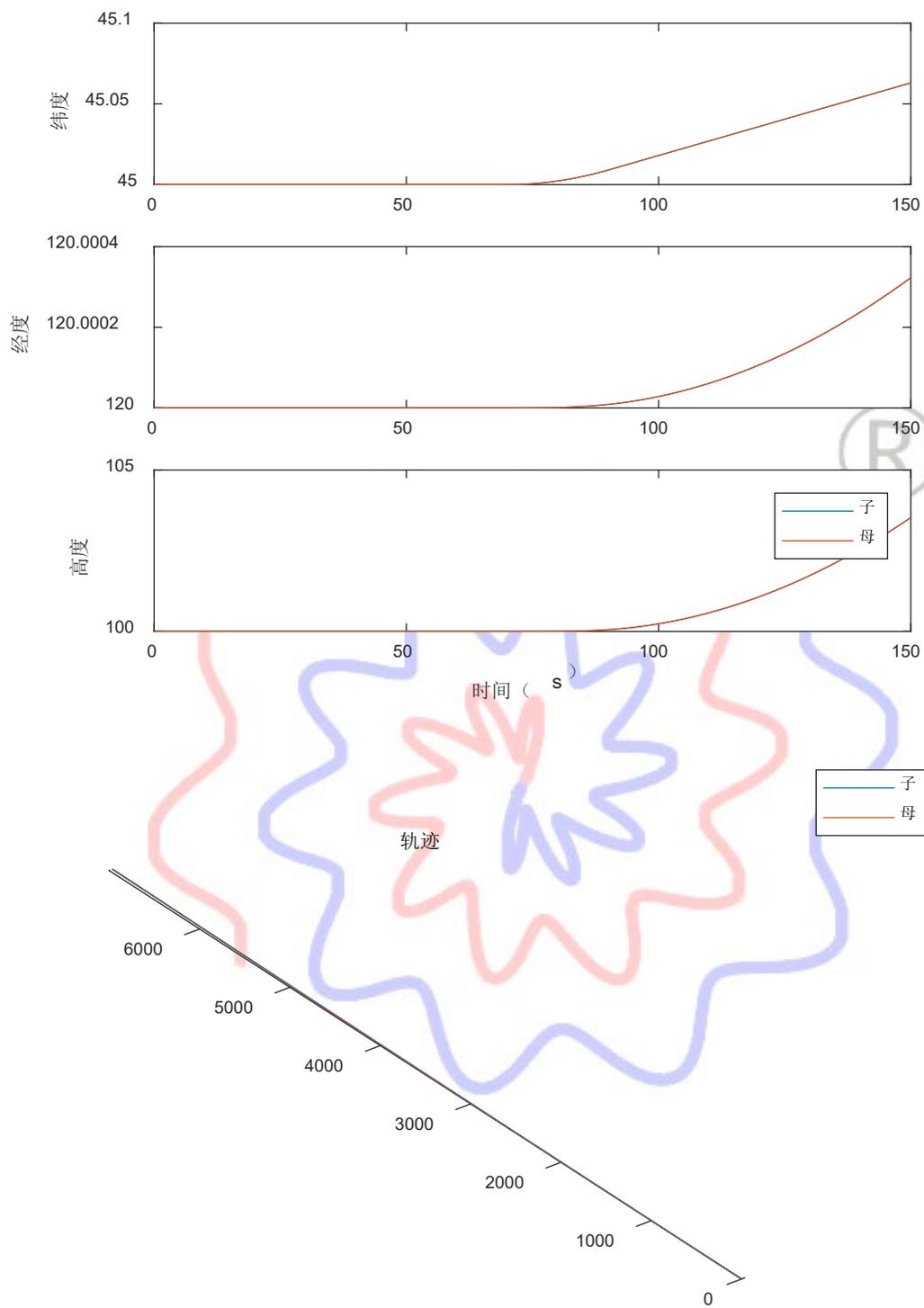
1.2.1. 速度位置匹配

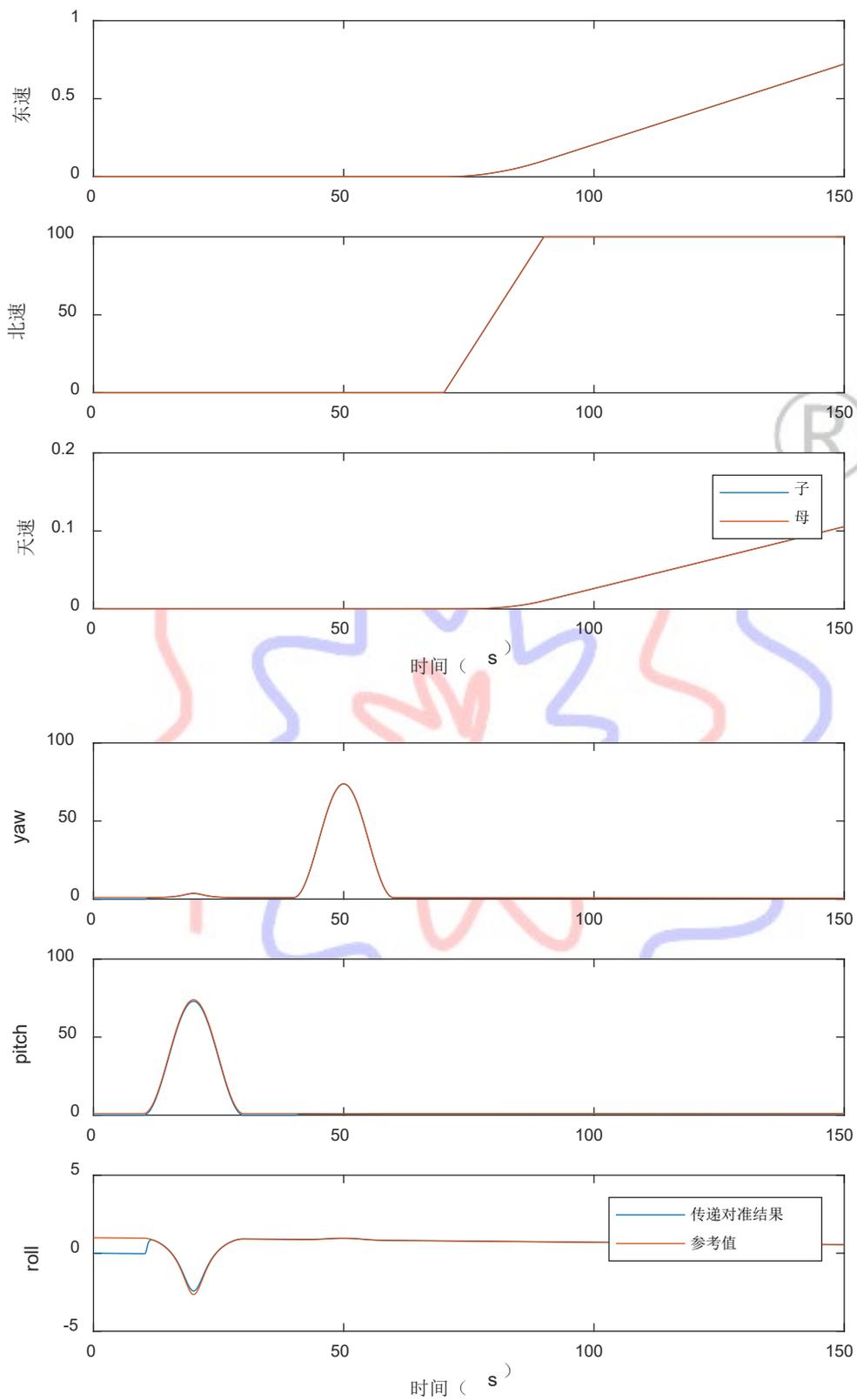


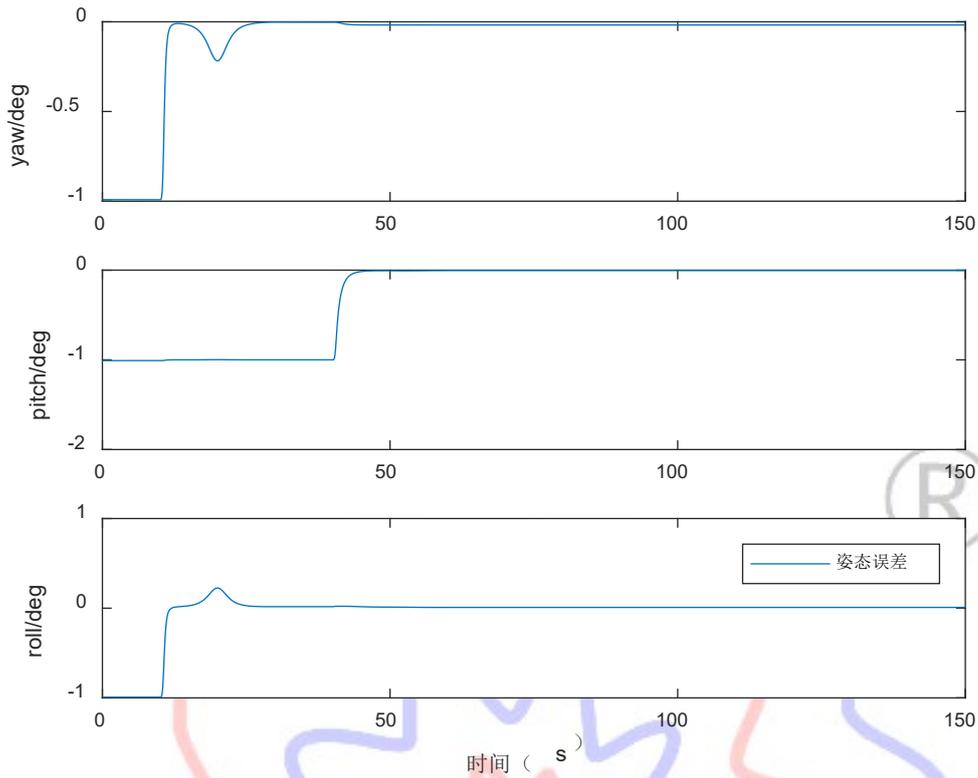




1.2.2. 姿态匹配







1.2.3. 结果分析

生成仿真数据时，子惯导和主惯导之间设置了固定的姿态差异。在传递对准之后，子惯导的姿态误差逐渐收敛，证明了传递对准方法有效。

1.3. 部分代码截图

```

1 %生成仿真数据
2 clear
3 rng(0);
4
5 %生成系统
6 dftms=0.005;
7 L=20000;
8 t=(1:L)*dftms;
9 s=sin(2*pi*(1:4000)/4000); %一个机动数据
10 w=zeros(L,3);
11 am=zeros(L,3);
12
13
14 w(1000:4000,1)=s+d*0.2;
15 w(5001:12000,3)=s+d*0.2;
16 am(14001:18000,2)=s;
17
18 ccm=cnb(qupdate([1;0;0;0], [1;1;1]/180*pi)); %主子惯导
19 cam=ccm %每颗子的转换矩阵
20
21 attil=seteula(0,0,0);
22 posil=[45/180*pi; 120/180*pi; 100];
23 speedil=zeros(3,1);
24 [~,~,ge]=earth2dellupdate(posil);
25
26 data=zeros(L,18); %子惯导陀螺仪、加速度计、姿态、母惯导
27
28
29 %for i=1:L
30 %母惯导系统
31 gyro=cnb(k,:);
32 Cbn=cnb(attil);
33 acc=cm*(am(k,:)+0.0*ge);
34 [attil,speedil,posil,accl]=insgyroacc(gyro,acc,
35
36 %子惯导系统
37 gyro=cam*gyro;
38 acc=cam*acc;
39 cam=cnb(attil);
40 cam=cam*cca;
41 cnc=ccm;
42
43 data(k,:)=['gyro',accl,'getoulacnb(cnc)',getoul
44
45 end
46
47 %根据需要在下面加误差
48 % data(:,1)=data(:,1)+(1e-9)*randn(L,1)*(1e-6);
49 % data(:,2)=data(:,2)+(2e-9)*randn(L,1)*(1e-6);
50 % data(:,3)=data(:,3)+(1e-9)*randn(L,1)*(1e-6);
51 % data(:,4)=data(:,4)+(1e-9)*randn(L,1)*(1e-9);
52 % data(:,5)=data(:,5)+(2e-9)*randn(L,1)*(1e-9);
53 % data(:,6)=data(:,6)+(1e-9)*randn(L,1)*(1e-9);
54
55 save('data.mat','data');
56
57
58
59 %数据保存
60 data(k,1:9)=[geteula(attil)', speedil', posil'];
61 data(k,10:12)=Zl';
62 data(k,16:24)=Xl';
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
206
207
208
209
210
211
212
213
214
215
216
217
218
219
220
221
222
223
224
225
226
227
228
229
230
231
232
233
234
235
236
237
238
239
240
241
242
243
244
245
246
247
248
249
250
251
252
253
254
255
256
257
258
259
260
261
262
263
264
265
266
267
268
269
270
271
272
273
274
275
276
277
278
279
280
281
282
283
284
285
286
287
288
289
290
291
292
293
294
295
296
297
298
299
300
301
302
303
304
305
306
307
308
309
310
311
312
313
314
315
316
317
318
319
320
321
322
323
324
325
326
327
328
329
330
331
332
333
334
335
336
337
338
339
340
341
342
343
344
345
346
347
348
349
350
351
352
353
354
355
356
357
358
359
360
361
362
363
364
365
366
367
368
369
370
371
372
373
374
375
376
377
378
379
380
381
382
383
384
385
386
387
388
389
390
391
392
393
394
395
396
397
398
399
400
401
402
403
404
405
406
407
408
409
410
411
412
413
414
415
416
417
418
419
420
421
422
423
424
425
426
427
428
429
430
431
432
433
434
435
436
437
438
439
440
441
442
443
444
445
446
447
448
449
450
451
452
453
454
455
456
457
458
459
460
461
462
463
464
465
466
467
468
469
470
471
472
473
474
475
476
477
478
479
480
481
482
483
484
485
486
487
488
489
490
491
492
493
494
495
496
497
498
499
500
501
502
503
504
505
506
507
508
509
510
511
512
513
514
515
516
517
518
519
520
521
522
523
524
525
526
527
528
529
530
531
532
533
534
535
536
537
538
539
540
541
542
543
544
545
546
547
548
549
550
551
552
553
554
555
556
557
558
559
560
561
562
563
564
565
566
567
568
569
570
571
572
573
574
575
576
577
578
579
580
581
582
583
584
585
586
587
588
589
590
591
592
593
594
595
596
597
598
599
600
601
602
603
604
605
606
607
608
609
610
611
612
613
614
615
616
617
618
619
620
621
622
623
624
625
626
627
628
629
630
631
632
633
634
635
636
637
638
639
640
641
642
643
644
645
646
647
648
649
650
651
652
653
654
655
656
657
658
659
660
661
662
663
664
665
666
667
668
669
670
671
672
673
674
675
676
677
678
679
680
681
682
683
684
685
686
687
688
689
690
691
692
693
694
695
696
697
698
699
700
701
702
703
704
705
706
707
708
709
710
711
712
713
714
715
716
717
718
719
720
721
722
723
724
725
726
727
728
729
730
731
732
733
734
735
736
737
738
739
740
741
742
743
744
745
746
747
748
749
750
751
752
753
754
755
756
757
758
759
760
761
762
763
764
765
766
767
768
769
770
771
772
773
774
775
776
777
778
779
780
781
782
783
784
785
786
787
788
789
790
791
792
793
794
795
796
797
798
799
800
801
802
803
804
805
806
807
808
809
810
811
812
813
814
815
816
817
818
819
820
821
822
823
824
825
826
827
828
829
830
831
832
833
834
835
836
837
838
839
840
841
842
843
844
845
846
847
848
849
850
851
852
853
854
855
856
857
858
859
860
861
862
863
864
865
866
867
868
869
870
871
872
873
874
875
876
877
878
879
880
881
882
883
884
885
886
887
888
889
890
891
892
893
894
895
896
897
898
899
900
901
902
903
904
905
906
907
908
909
910
911
912
913
914
915
916
917
918
919
920
921
922
923
924
925
926
927
928
929
930
931
932
933
934
935
936
937
938
939
940
941
942
943
944
945
946
947
948
949
950
951
952
953
954
955
956
957
958
959
960
961
962
963
964
965
966
967
968
969
970
971
972
973
974
975
976
977
978
979
980
981
982
983
984
985
986
987
988
989
990
991
992
993
994
995
996
997
998
999
1000
1001
1002
1003
1004
1005
1006
1007
1008
1009
1010
1011
1012
1013
1014
1015
1016
1017
1018
1019
1020
1021
1022
1023
1024
1025
1026
1027
1028
1029
1030
1031
1032
1033
1034
1035
1036
1037
1038
1039
1040
1041
1042
1043
1044
1045
1046
1047
1048
1049
1050
1051
1052
1053
1054
1055
1056
1057
1058
1059
1060
1061
1062
1063
1064
1065
1066
1067
1068
1069
1070
1071
1072
1073
1074
1075
1076
1077
1078
1079
1080
1081
1082
1083
1084
1085
1086
1087
1088
1089
1090
1091
1092
1093
1094
1095
1096
1097
1098
1099
1100
1101
1102
1103
1104
1105
1106
1107
1108
1109
1110
1111
1112
1113
1114
1115
1116
1117
1118
1119
1120
1121
1122
1123
1124
1125
1126
1127
1128
1129
1130
1131
1132
1133
1134
1135
1136
1137
1138
1139
1140
1141
1142
1143
1144
1145
1146
1147
1148
1149
1150
1151
1152
1153
1154
1155
1156
1157
1158
1159
1160
1161
1162
1163
1164
1165
1166
1167
1168
1169
1170
1171
1172
1173
1174
1175
1176
1177
1178
1179
1180
1181
1182
1183
1184
1185
1186
1187
1188
1189
1190
1191
1192
1193
1194
1195
1196
1197
1198
1199
1200
1201
1202
1203
1204
1205
1206
1207
1208
1209
1210
1211
1212
1213
1214
1215
1216
1217
1218
1219
1220
1221
1222
1223
1224
1225
1226
1227
1228
1229
1230
1231
1232
1233
1234
1235
1236
1237
1238
1239
1240
1241
1242
1243
1244
1245
1246
1247
1248
1249
1250
1251
1252
1253
1254
1255
1256
1257
1258
1259
1260
1261
1262
1263
1264
1265
1266
1267
1268
1269
1270
1271
1272
1273
1274
1275
1276
1277
1278
1279
1280
1281
1282
1283
1284
1285
1286
1287
1288
1289
1290
1291
1292
1293
1294
1295
1296
1297
1298
1299
1300
1301
1302
1303
1304
1305
1306
1307
1308
1309
1310
1311
1312
1313
1314
1315
1316
1317
1318
1319
1320
1321
1322
1323
1324
1325
1326
1327
1328
1329
1330
1331
1332
1333
1334
1335
1336
1337
1338
1339
1340
1341
1342
1343
1344
1345
1346
1347
1348
1349
1350
1351
1352
1353
1354
1355
1356
1357
1358
1359
1360
1361
1362
1363
1364
1365
1366
1367
1368
1369
1370
1371
1372
1373
1374
1375
1376
1377
1378
1379
1380
1381
1382
1383
1384
1385
1386
1387
1388
1389
1390
1391
1392
1393
1394
1395
1396
1397
1398
1399
1400
1401
1402
1403
1404
1405
1406
1407
1408
1409
1410
1411
1412
1413
1414
1415
1416
1417
1418
1419
1420
1421
1422
1423
1424
1425
1426
1427
1428
1429
1430
1431
1432
1433
1434
1435
1436
1437
1438
1439
1440
1441
1442
1443
1444
1445
1446
1447
1448
1449
1450
1451
1452
1453
1454
1455
1456
1457
1458
1459
1460
1461
1462
1463
1464
1465
1466
1467
1468
1469
1470
1471
1472
1473
1474
1475
1476
1477
1478
1479
1480
1481
1482
1483
1484
1485
1486
1487
1488
1489
1490
1491
1492
1493
1494
1495
1496
1497
1498
1499
1500
1501
1502
1503
1504
1505
1506
1507
1508
1509
1510
1511
1512
1513
1514
1515
1516
1517
1518
1519
1520
1521
1522
1523
1524
1525
1526
1527
1528
1529
1530
1531
1532
1533
1534
1535
1536
1537
1538
1539
1540
1541
1542
1543
1544
1545
1546
1547
1548
1549
1550
1551
1552
1553
1554
1555
1556
1557
1558
1559
1560
1561
1562
1563
1564
1565
1566
1567
1568
1569
1570
1571
1572
1573
1574
1575
1576
1577
1578
1579
1580
1581
1582
1583
1584
1585
1586
1587
1588
1589
1590
1591
1592
1593
1594
1595
1596
1597
1598
1599
1600
1601
1602
1603
1604
1605
1606
1607
1608
1609
1610
1611
1612
1613
1614
1615
1616
1617
1618
1619
1620
1621
1622
1623
1624
1625
1626
1627
1628
1629
1630
1631
1632
1633
1634
1635
1636
1637
1638
1639
1640
1641
1642
1643
1644
1645
1646
1647
1648
1649
1650
1651
1652
1653
1654
1655
1656
1657
1658
1659
1660
1661
1662
1663
1664
1665
1666
1667
1668
1669
1670
1671
1672
1673
1674
1675
1676
1677
1678
1679
1680
1681
1682
1683
1684
1685
1686
1687
1688
1689
1690
1691
1692
1693
1694
1695
1696
1697
1698
1699
1700
1701
1702
1703
1704
1705
1706
1707
1708
1709
1710
1711
1712
1713
1714
1715
1716
1717
1718
1719
1720
1721
1722
1723
1724
1725
1726
1727
1728
1729
1730
1731
1732
1733
1734
1735
1736
1737
1738
1739
1740
1741
1742
1743
1744
1745
1746
1747
1748
1749
1750
1751
1752
1753
1754
1755
1756
1757
1758
1759
1760
1761
1762
1763
1764
1765
1766
1767
1768
1769
1770
1771
1772
1773
1774
1775
1776
1777
1778
1779
1780
1781
1782
1783
1784
1785
1786
1787
1788
1789
1790
1791
1792
1793
1794
1795
1796
1797
1798
1799
1800
1801
1802
1803
1804
1805
1806
1807
1808
1809
1810
1811
1812
1813
1814
1815
1816
1817
1818
1819
1820
1821
1822
1823
1824
1825
1826
1827
1828
1829
1830
1831
1832
1833
1834
1835
1836
1837
1838
1839
1840
1841
1842
1843
1844
1845
1846
1847
1848
1849
1850
1851
1852
1853
1854
1855
1856
1857
1858
1859
1860
1861
1862
1863
1864
1865
1866
1867
1868
1869
1870
1871
1872
1873
1874
1875
1876
1877
1878
1879
1880
1881
1882
1883
1884
1885
1886
1887
1888
1889
1890
1891
1892
1893
1894
1895
1896
1897
1898
1899
1900
1901
1902
1903
1904
1905
1906
1907
1908
1909
1910
1911
1912
1913
1914
1915
1916
1917
1918
1919
1920
1921
1922
1923
1924
1925
1926
1927
1928
1929
1930
1931
1932
1933
1934
1935
1936
1937
1938
1939
1940
1941
1942
1943
1944
1945
1946
1947
1948
1949
1950
1951
1952
1953
1954
1955
1956
1957
1958
1959
1960
1961
1962
1963
1964
1965
1966
1967
1968
1969
1970
1971
1972
1973
1974
1975
1976
1977
1978
1979
1980
1981
1982
1983
1984
1985
1986
1987
1988
1989
1990
1991
1992
1993
1994
1995
1996
1997
1998
1999
2000
2001
2002
2003
2004
2005
2006
2007
2008
2009
2010
2011
2012
2013
2014
2015
2016
2017
2018
2019
2020
2021
2022
2023
2024
2025
2026
2027
2028
2029
2030
2031
2032
2033
2034
2035
2036
2037
2038
2039
2040
2041
2042
2043
2044
2045
2046
2047
2048
2049
2050
2051
2052
2053
2054
2055
2056
2057
2058
2059
2060
2061
2062
2063
2064
2065
2066
2067
2068
2069
2070
2071
2072
2073
2074
2075
2076
2077
2078
2079
2080
2081
2082
2083
2084
2085
2086
2087
2088
2089
2090
2091
2092
2093
2094
2095
2096
2097
2098
2099
2100
2101
2102
2103
2104
2105
2106
2107
2108
2109
2110
2111
2112
2113
2114
2115
2116
2117
2118
2119
2120
2121
2122
2123
2124
2125
2126
2127
2128
2129
2130
2131
2132
2133
2134
2135
2136
2137
2138
2139
2140
2141
2142
2143
2144
2145
2146
2147
2148
2149
2150
2151
2152
2153
2154
2155
2156
2157
2158
2159
2160
2161
2162
2163
2164
2165
2166
2167
2168
2169
2170
2171
2172
2173
2174
2175
2176
2177
2178
2179
2180
2181
2182
2183
2184
2185
2186
2187
2188
2189
2190
2191
2192
2193
2194
2195
2196
2197
2198
2199
2200
2201
2202
2203
2204
2205
2206
2207
2208
2209
2210
2211
2212
2213
2214
2215
2216
2217
2218
2219
2220
2221
2222
2223
2224
2225
2226
2227
2228
2229
2230
2231
2232
2233
2234
2235
2236
2237
2238
2239
2240
2241
2242
2243
2244
2245
2246
2247
2248
2249
2250
2251
2252
2253
2254
2255
2256
2257
2258
2259
2260
2261
2262
2263
2264
2265
2266
2267
2268
2269
2270
2271
2272
2273
2274
2275
2276
2277
2278
2279
2280
2281
2282
2283
2284
2285
2286
2287
2288
2289
2290
2291
2292
2293
2294
2295
2296
2297
2298
2299
2300
2301
2302
2303
2304
2305
2306
2307
2308
2309
2310
2311
2312
2313
2314
2315
2316
2317
2318
2319
2320
2321
2322
2323
2324
2325
2326
2327
2328
2329
2330
2331
2332
2333
2334
2335
2336
2337
2338
2339
2340
2341
2342
2343
2344
2345
2346
2347
2348
2349
2350
2351
2352
2353
2354
2355
2356
2357
2358
2359
2360
2361
2362
2363
2364
2365
2366
2367
2368
2369
2370
2371
2372
2373
2374
2375
2376
2377
2378
2379
2380
2381
2382
2383
2384
2385
2386
2387
2388
2389
2390
2391
2392
2393
2394
2395
2396
2397
2398
2399
2400
2401
2402
2403
2404
2405
2406
2407
2408
2409
2410
2411
2412
2413
2414
2415
2416
2417
2418
2419
2420
2421
2422
2423
2424
2425
2426
2427
2428
2429
2430
2431
2432
2433
2434
2435
2436
2437
2438
2439
2440
2441
2442
2443
2444
2445
2446
2447
2448
2449
2450
2451
2452
2453
2454
2455
2456
2457
2458
2459
2460
2461
2462
2463
2464
2465
2466
2467
2468
2469
2470
2471
2472
2473
2474
2475
2476
2477
2478
2479
2480
2481
2482
2483
2484
2485
2486
2487
2488
2489
2490
2491
2492
2493
2494
2495
2496
2497
2498
2499
2500
2501
2502

```

2. 计算原理

2.1. 概念定义

惯性测量单元为 3 轴陀螺仪和 3 轴加速度计。定义 x 向东、 y 向北、 z 向天为姿态 0 位置。旋转方向和角速度方向满足右手法则，即右手握住坐标轴，大拇指位于坐标轴正向，则其余四个手指指向旋转正向。姿态的欧拉角旋转顺序定义为依次绕 z 、 x 、 y 旋转。

组合导航中，扩展卡尔曼滤波的状态变量定义为 15 维度的误差量：纬经高，东北天速度，东北天姿态，三轴陀螺仪零偏，三轴加速度计零偏。

若无特殊说明，一般采用国际单位制。角度单位为 rad ，角速度单位为 rad/s ，速度单位 m/s ，加速度单位 m/s/s 。

2.2. 主程序

主程序为 `instance1.m`。直接运行即可。

程序主要工作流程为：



2.3. 坐标系

载体系 b 定义为与载体固定连接的坐标系，不妨取 xyz 轴为右前上。

地理系 t 定义为与载体处地面重合的坐标系，不妨取 xyz 轴为东北天。

导航坐标系 n 是表示导航结果的坐标系。在航海、航空领域中，为了避免船只、飞机通过南北极附近时 n 系快速旋转导致导航结果异常， n 系会与 t 系有一定的夹角。在普通导航系统中，可以不考虑载体通过南北极的情况，因此选取 n 系与 t 系重合以使导航算法简化。

平台坐标系 p ，是平台式导航系统中传感器的指向，或者是捷联式导航系统中数学换算后的传感器的指向。理想情况下 p 系与 n 系重合；但是由于陀螺仪误差等因素，真实的 p 系与 n 系有误差角。捷联式导航系统希望把加速度换算到 n 系中，但是实际上是换算到了 p 系中。在一般的导航计算中，不必刻意区分 p 系和 n 系，但是在分析误差时需要引入 p 系。

地球坐标系 e ，是和地球固连的坐标系，不妨规定 z 轴沿着南北极方向指向北， x 轴指向 0 经度方向。

惯性参考系 i 。惯性参考系主要用于描述概念。惯性导航中一般不需要真正地在惯性参考系中投影，所以不必在惯性参考系中规定坐标系。

完整地描述角速率、姿态、加速度、速度、位移等需要 3 个坐标系。坐标系 β 相对于坐标系 α 的变化量 x 在坐标系 γ 的投影表示为 $x_{\alpha\beta}^{\gamma}$ 。例如，地球自转在地理系的坐标为

$$\omega_{ie}^t = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_e \cos L \\ \omega_e \sin L \end{bmatrix} \quad (2-1)$$

其中 ω_e 是地球自转角速率， L 是纬度。这是地球系 e 相对于惯性系 i 的转动在地理系 t 的投影。在这种表示方法下，一些简单的计算规则如下：

同一个坐标系内表示的变量符合向量加法规则，即

$$\mathbf{x}_{AB}^y + \mathbf{x}_{BC}^y = \mathbf{x}_{AC}^y \quad (2-2)$$

同一个变量在不同坐标系的换算可以用矩阵表示。

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta}^\mu = \mathbf{C}_\gamma^\mu \mathbf{x}_{\alpha\beta}^y \quad (2-3)$$

坐标变换矩阵表示旋转关系。例如二维的坐标变换矩阵为

$$\mathbf{C}_n^b = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

三维的坐标旋转有 3 个自由度，可以看作是类似形式矩阵相乘。

坐标变换矩阵是正交矩阵，逆矩阵是原矩阵的转置

$$\mathbf{C}_\mu^y = (\mathbf{C}_\gamma^\mu)^{-1} = (\mathbf{C}_\gamma^\mu)^T \quad (2-5)$$

2.4. 惯性导航

2.4.1. 基本原理

惯性导航的基本原理是：陀螺仪测量角速度，角速度积分得到姿态。加速度计测量加速度，加速度积分得到速度，速度积分得到位置。

实际情况中有一些因素导致上述计算变得复杂。1.需要进行一些坐标系变换。2.需要考虑地球的自转、重力、以及球形形状。

2.4.2. 姿态更新

三维空间有 3 个旋转自由度。类似式(2-4)，依次绕三个坐标轴旋转，则坐标变换矩阵为

$$\mathbf{C}_n^b = \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & -\sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & \sin \theta_x \\ 0 & -\sin \theta_x & \cos \theta_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_z & \sin \theta_z & 0 \\ -\sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

把坐标变换矩阵表示为绕坐标轴分别旋转三次，三次旋转的角度即为欧拉角。旋转的顺序并不是唯一的，也可以定义旋转顺序不同的欧拉角。同一个坐标变换矩阵，在不同的旋转顺序定义下，有不同的欧拉角角度；同样的旋转角度，按照不同的坐标轴顺序旋转，会得到不同的坐标变换矩阵；这个性质称为姿态角的不可交换性。所以使用欧拉角描述姿态时必须规定清楚旋转顺序。本书中欧拉角定义为：初始状态右前上 (xyz) 三轴位于东北天方向，依次绕上轴旋转偏航角，绕右轴旋转俯仰角，绕前轴旋转横滚角。

如果每次旋转的角度很小，则坐标变换矩阵近似为

$$d\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -d\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ d\theta_y & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d\theta_x \\ 0 & -d\theta_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d\theta_z & 0 \\ -d\theta_z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

略去二阶小量，则有

$$d\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & d\theta_z & -d\theta_y \\ -d\theta_z & 1 & d\theta_x \\ d\theta_y & -d\theta_x & 1 \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

上式表示了坐标旋力矩阵与旋转角度的关系。如果旋转角度很小，则不必考虑旋转顺序。为了表示的方便，引入角增量反对称矩阵

$$[\boldsymbol{\theta}] = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

那么姿态矩阵更新公式为

$$\mathbf{C}_b^i(t+T) = \mathbf{C}_b^i(t) \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\mathbf{I} + \frac{[\boldsymbol{\theta}_{ib}^b]}{k} \right)^k = \mathbf{C}_b^i(t) \exp([\boldsymbol{\theta}_{ib}^b]) \quad (2-10)$$

其中 \exp 表示自然常数 e 为底数的指数函数。 $\mathbf{C}_b^i(t)$ 是上一时刻的姿态矩阵， $\mathbf{C}_b^i(t+T)$ 是下一时刻的姿态矩阵。上式即姿态更新公式。

利用麦克劳林公式，能得到更便于计算的如下公式

$$\exp([\boldsymbol{\theta}]) = \mathbf{I} + \frac{\sin|\boldsymbol{\theta}|}{|\boldsymbol{\theta}|} [\boldsymbol{\theta}] + \frac{1 - \cos|\boldsymbol{\theta}|}{|\boldsymbol{\theta}|^2} [\boldsymbol{\theta}]^2 \quad (2-11)$$

如果旋转角度较小，同时为了避免分母为 0，可以采用如下近似公式

$$\exp([\boldsymbol{\theta}]) \approx \mathbf{I} + [\boldsymbol{\theta}] \quad (2-12)$$

根据上述若干公式，使用陀螺仪数据计算得到姿态。

实际导航系统中，为了防止计算误差导致姿态矩阵失去正交性，也为了减少计算量，往往采用四元数代替姿态矩阵进行姿态更新。四元数定义为

$$\mathbf{q} = \left[\cos \frac{\theta}{2} \quad u_x \sin \frac{\theta}{2} \quad u_y \sin \frac{\theta}{2} \quad u_z \sin \frac{\theta}{2} \right]^T \quad (2-13)$$

其中 θ 是旋转的角度， $[u_x \quad u_y \quad u_z]^T$ 是旋转轴的单位向量。

四元数也可以表示为

$$\mathbf{q} = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{A} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2-14)$$

其中 \mathbf{A} 是旋转轴的单位向量。

四元数姿态微分方程为

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad (2-15)$$

引入 4 维的角增量矩阵

$$[\boldsymbol{\theta}] = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_x & -\theta_y & -\theta_z \\ \theta_x & 0 & \theta_z & -\theta_y \\ \theta_y & -\theta_z & 0 & \theta_x \\ \theta_z & \theta_y & -\theta_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2-16)$$

四元数更新姿态的公式为

$$\mathbf{q}(t+T) = \left(\cos \frac{|\boldsymbol{\theta}|}{2} \mathbf{I} + \frac{\sin \frac{|\boldsymbol{\theta}|}{2}}{|\boldsymbol{\theta}|} [\boldsymbol{\theta}] \right) \mathbf{q}(t) \quad (2-17)$$

姿态可以用 3*3 矩阵或者 4*1 的四元数表示。本代码包采用四元数计算姿态，这是主流方法。但是矩阵对于坐标系变换的计算比较方便，所以坐标变换的地方使用了矩阵表示姿态。根据角度增量更新姿态四元数，为 `qupdate` 函数。

实际导航中计算姿态时，要扣除地球自转的影响。此外，由于地球是球形的，位置变化时地面会向下弯曲，相对于地面的姿态就变了，所以速度会导致一个额外的角速度。

惯性导航需要依次计算姿态、速度、位置。陀螺仪直接测到 \mathbf{b} 系相对于 \mathbf{i} 系的转动，而导航解算中需要计算 \mathbf{b} 系相对于 \mathbf{n} 系的姿态。导航系 \mathbf{n} 系相对于惯性系 \mathbf{i} 系的相对转动包括两个部分：一是地球自转角速率；二是因为地球表面是曲面，载体位置变化会导致 \mathbf{n} 系相对 \mathbf{e} 系的姿态发生变化，角速率 $\boldsymbol{\omega}_{en}^n$ 与速度有关

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \begin{bmatrix} -\frac{v_N}{R_m + H} \\ \frac{v_E}{R_p + H} \\ \frac{v_E \tan L}{R_p + H} \end{bmatrix} \quad (2-18)$$

其中 R_m 和 R_p 分别是子午圈和卯酉圈的半径， L 是纬度。

因为

$$\boldsymbol{\omega}_{nb}^b = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \boldsymbol{\omega}_{ie}^b - \boldsymbol{\omega}_{en}^b \quad (2-19)$$

所以

$$\boldsymbol{\omega}_{nb}^b = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \mathbf{C}_n^b(\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \quad (2-20)$$

根据上述角速率计算 \mathbf{C}_n^b ，即姿态。

2.4.3. 速度更新和位置更新

加速度要从传感器的坐标系换算到东北天。本来速度是加速度积分。但是由于地球自转，需要扣除离心力和科里奥利力。此外，加速度计不能区分重力和一般的加速度，所以还需要扣除重力。

加速度为

$$\dot{\mathbf{V}}_{en}^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}_b - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n \times \mathbf{V}_{en}^n - \boldsymbol{\omega}_{en}^n \times \mathbf{V}_{en}^n + \mathbf{g} \quad (2-21)$$

其中 \mathbf{f}_b 是加速度计的数值。根据等效原理，加速度计不能把重力与真正的加速度相区分，所以要扣除地球重力 \mathbf{g} 的影响。因为地球是圆的，所以要补偿离心加速度项 $\boldsymbol{\omega}_{en}^n \times \mathbf{V}_{en}^n$ 。因为地球在自转，所以要补偿科氏加速度 $2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n \times \mathbf{V}_{en}^n$ 。

加速度积分计算得到速度。速度积分计算得到位置。如果用经纬高表示位置，则有

$$\dot{L} = V_N / R_m \quad (2-22)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{V_E}{R_p \cos L} \quad (2-23)$$

其中 L 和 λ 分别是纬度和经度， R_m 和 R_p 分别是当前位置的子午圈和卯酉圈半径。

地球是个椭圆，函数 `earthmodelupdate` 计算两个方向的半径和重力。

2.5. 组合导航

2.5.1. 原理概述

连续计算惯性导航；当获取主惯导数据时，采用扩展卡尔曼滤波修正导航误差。

卡尔曼滤波可以理解为：根据方差求权重，做加权平均。

原始的卡尔曼滤波适用于线性系统。因为导航系统不是线性的，所以采用扩展卡尔曼滤波。扩展卡尔曼滤波的主要方法是，选用误差量，利用一阶微分近似为线性系统。滤波得到误差量估计值后，立刻补偿误差。

有的文献把 EKF 算法进一步细化为 ESKF 算法，严格意义上本代码包的方法属于 ESKF 算法。但是大量的文献没有把 EKF 算法进行如此细致的划分，本代码包的算法完全可以说就是 EKF 算法。

2.5.2. 卡尔曼滤波

比较复杂的系统中，一方面系统具有多个自由度，另一方面被测量随着时间而变化。因此用状态空间方程的形式描述系统的关系，并把加权平均数计算方法用矩阵表示，则得到卡尔曼滤波。

系统表示为：

$$\mathbf{x}_k = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (2-24)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (2-25)$$

其中是 \mathbf{x} 状态量，是希望获得而又难以准确测量的量。式(2-24)描述了被测量的变化关系，这里是离散形式。 \mathbf{z} 表示量测量，是能测量得到但是包含随机误差的量。式(2-25)描述了量测量与状态量的关系。 \mathbf{w} 和 \mathbf{v} 是随机噪声。有的系统中 \mathbf{w} 和 \mathbf{v} 会乘以系数矩阵，但是大多数惯性导航装置的三轴传感器精度大体相当，因此没必要引入标准卡尔曼滤波的 \mathbf{F} 矩阵。

状态量的变化也可以描述为连续方程

$$\dot{\mathbf{x}}_k = \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1} \quad (2-26)$$

如果采样间隔足够小，离散方程与连续方程的关系为

$$\Phi = \mathbf{I} + \mathbf{F}T \quad (2-27)$$

其中 T 为采样间隔， \mathbf{I} 为单位矩阵。

卡尔曼滤波的解算过程就是根据 \mathbf{z} 估计 \mathbf{x} ，具体方法如下：

如果不考虑误差，前后时刻的 \mathbf{x} 具有关系

$$\hat{\mathbf{X}}_{k|k-1} = \Phi\hat{\mathbf{X}}_{k-1} \quad (2-28)$$

$\hat{\mathbf{X}}_{k-1}$ 是前一时刻 \mathbf{x} 的估计值， $\hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}$ 是推算的后一时刻的 \mathbf{x} 。但是因为误差的存在，这个推算并不准确，需要根据 \mathbf{z} 修正，因此取

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}) \quad (2-29)$$

其中 \mathbf{K}_k 是反映权重的滤波增益。这个增益由如下方法计算

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \Phi\mathbf{P}_{k-1}\Phi^T + \mathbf{Q} \quad (2-30)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (2-31)$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H})\mathbf{P}_{k|k-1}(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H})^T + \mathbf{K}_k\mathbf{R}\mathbf{K}_k^T \quad (2-32)$$

其中 \mathbf{P} 、 \mathbf{Q} 、 \mathbf{R} 分别是 $\hat{\mathbf{X}}$ 、 \mathbf{w} 、 \mathbf{v} 的方差矩阵。

上述公式给出了线性系统的卡尔曼滤波方法。非线性系统可以局部微分而近似为线性系统，采用扩展卡尔曼滤波方法解算。扩展卡尔曼滤波中的 \mathbf{x} 是误差量，扩展卡尔曼滤波获得误差量后，及时修正，使得误差量总维持在较小范围内；在误差量较小时，局部微分得到的线性系统与原始的非线性系统基本一致，卡尔曼滤波能取得较好效果。

代码包采用闭环反馈校正的方式，滤波后修正惯导误差，所以标准卡尔曼滤波中的 $\hat{\mathbf{X}}_{k-1}$ 取0，简化后的计算公式为

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \mathbf{K}_k\mathbf{z}_k \quad (2-33)$$

用扩展卡尔曼滤波进行组合导航的步骤是：1.进行惯性导航解算。2.主惯导修正时，比较惯性导航与主惯导导航的结果偏差，即 \mathbf{z} 。3.用卡尔曼滤波计算 \mathbf{x} 。4.根据 \mathbf{x} 修正惯性导航的结果，并返回步骤1。

2.6. 传递对准

2.6.1. 速度位置匹配

速度位置匹配，取扩展卡尔曼滤波的状态量 \mathbf{x} 为15维向量，包含位置误差、速度误差、姿态误差、陀螺仪零偏、加速度计零偏各3个自由度，即

$$\mathbf{x} = [\delta L \quad \delta \lambda \quad \delta h \quad \delta v_E \quad \delta v_N \quad \delta v_U \quad \delta \phi_E \quad \delta \phi_N \quad \delta \phi_U \quad \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \nabla_x \quad \nabla_y \quad \nabla_z]^T \quad (2-34)$$

组合导航系统关键在于具体列出状态矩阵 Φ ，即可实现组合导航的计算。扩展卡尔曼滤波的矩阵 \mathbf{F} 是雅可比矩阵，即偏微分矩阵。根据惯性导航的计算公式，可以得到 \mathbf{F} 如下。

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{pp} & \mathbf{F}_{vp} & \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{F}_{pv} & \mathbf{F}_{vv} & \mathbf{F}_{av} & \mathbf{O}_3 & \mathbf{C}_b^n \\ \mathbf{F}_{pa} & \mathbf{F}_{va} & \mathbf{F}_{aa} & -\mathbf{C}_b^n & \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 \end{bmatrix} \quad (2-35)$$

其中每个子矩阵都是3阶方阵， \mathbf{O}_3 表示0矩阵。

反映位置误差对位置误差影响的子矩阵为

$$\mathbf{F}_{pp} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{v_N}{(R_m + h)^2} \\ \frac{v_E \sec L \tan L}{R_p + h} & 0 & -\frac{v_E \sec L}{(R_p + h)^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-36)$$

反映速度误差对位置误差影响的子矩阵为

$$\mathbf{F}_{vp} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_m + h} & 0 \\ \frac{\sec L}{R_p + h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-37)$$

反映位置误差对速度误差影响的子矩阵为

$$\mathbf{F}_{pv} = \begin{bmatrix} 2\omega_e v_N \cos L + 2\omega_e v_U \sin L + \frac{v_N v_E \sec^2 L}{R_p + h} & 0 & \frac{v_U v_E - v_N v_E \tan L}{(R_p + h)^2} \\ -\left(2\omega_e v_E \cos L + \frac{v_E^2 \sec^2 L}{R_p + h}\right) & 0 & \frac{v_N v_U}{(R_m + h)^2} + \frac{v_E^2 \tan L}{(R_p + h)^2} \\ -2v_E \omega_e \sin L & 0 & -\frac{v_N^2}{(R_m + h)^2} - \frac{v_E^2}{(R_p + h)^2} \end{bmatrix} \quad (2-38)$$

反映速度误差对速度误差影响的子矩阵为

$$\mathbf{F}_{vv} = \begin{bmatrix} \frac{v_N \tan L - v_U}{R_p + h} & 2\omega_e \sin L + \frac{v_E \tan L}{R_p + h} & -2\omega_e \cos L - \frac{v_E}{R_p + h} \\ -2\omega_e \sin L - \frac{2v_E \tan L}{R_p + h} & \frac{-v_U}{R_m + h} & \frac{-v_N}{R_m + h} \\ 2\left(\omega_e \cos L + \frac{v_E}{R_p + h}\right) & \frac{2v_N}{R_m + h} & 0 \end{bmatrix} \quad (2-39)$$

反映姿态误差对速度误差影响的子矩阵为

$$\mathbf{F}_{av} = \begin{bmatrix} 0 & -f_U & f_N \\ f_U & 0 & -f_E \\ -f_N & f_E & 0 \end{bmatrix} \quad (2-40)$$

其中 f_E 、 f_N 、 f_U 是换算到n系的加速度计数值，即不扣除重力的比力信息。

$$\mathbf{f}_n = \begin{bmatrix} f_E \\ f_N \\ f_U \end{bmatrix} = \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}_b \quad (2-41)$$

反映位置误差对姿态误差影响的子矩阵为

$$\mathbf{F}_{pa} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{v_N}{(R_m + h)^2} \\ -\omega_e \sin L & 0 & \frac{-v_E}{(R_p + h)^2} \\ \omega_e \cos L + \frac{v_E \sec^2 L}{R_p + h} & 0 & \frac{-v_E \tan L}{(R_p + h)^2} \end{bmatrix} \quad (2-42)$$

反映速度误差对姿态误差影响的子矩阵为

$$\mathbf{F}_{va} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{R_m + h} & 0 \\ \frac{1}{R_p + h} & 0 & 0 \\ \frac{\tan L}{R_p + h} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-43)$$

反映姿态误差对姿态误差影响的子矩阵为

$$\mathbf{F}_{aa} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_e \sin L + \frac{v_E \tan L}{R_p + h} & -\omega_e \cos L - \frac{v_E}{R_p + h} \\ -\omega_e \sin L - \frac{v_E \tan L}{R_p + h} & 0 & -\frac{v_N}{R_m + h} \\ \omega_e \cos L + \frac{v_E}{R_p + h} & \frac{v_N}{R_m + h} & 0 \end{bmatrix} \quad (2-44)$$

导航计算机每次收到惯性数据时，要计算 \mathbf{F} 矩阵，并更新 Φ 矩阵。导航计算机收到主惯导数据时再进行卡尔曼滤波解算，并根据滤波计算得到的误差量修正导航结果。

观测矩阵为

$$\mathbf{H} = [\mathbf{I} \quad \mathbf{0}] \quad (2-45)$$

2.6.2. 姿态匹配

速度位置匹配，取扩展卡尔曼滤波的状态量 \mathbf{x} 为 9 维向量，包含姿态误差、安装误差、陀螺仪零偏各 3 个自由度，即

其中 \mathbf{F} 如下。

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{aa} & \mathbf{0}_3 & -\mathbf{C}_b^n \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \quad (2-46)$$

没有误差时，下面的矩阵应当为单位矩阵

$$\mathbf{M}_z = \mathbf{C}_m^n \mathbf{C}_s^m \mathbf{C}_n^s \quad (2-47)$$

其中 \mathbf{C}_n^s 是子导航系统的姿态矩阵，由子导航系统惯性导航解算得到。 \mathbf{C}_m^n 是主导航系统的姿态矩阵，由主导航系统数据得到。 \mathbf{C}_s^m 是主导航系统和子导航系统的安装误差矩阵，会根据 EKF 的计算结果逐渐修正。注意这三个矩阵的上下标定义有所区别。把上述矩阵换算为三个角，即观测量

$$\mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_z(3,2) - \mathbf{M}_z(2,3) \\ \mathbf{M}_z(1,3) - \mathbf{M}_z(3,1) \\ \mathbf{M}_z(2,1) - \mathbf{M}_z(1,2) \end{bmatrix} / 2 \quad (2-48)$$

观测矩阵为

$$\mathbf{H}_2 = [\mathbf{I}_3 \quad -\mathbf{C}_m^n \quad \mathbf{0}_3] \quad (2-49)$$

3. 著作权和服务

3.1. 工作原理参考什么资料

参考实体书《组合导航应用笔记》，东南大学出版社，2025 年。

讲解视频，哔哩哔哩视频网搜索“大胡子刘师傅”。

3.2. 著作权声明

本店保留著作权。

电路、说明书、全部附属代码（以下简称本代码包）仅限于学习和研究用途的少量使用；包含改编文件、写入嵌入式系统的编译后程序，所有副本总计不得超过 5 份。

本代码包有偿使用。

严禁转卖或公开发布本代码包的全部或一部分。

大规模应用本代码包需要额外取得本店的授权。

对于违反上述要求的用户，本店有权要求停止销售、撤稿、赔偿损失等。

3.3. 服务内容

赠送 30 分钟语音答疑服务，用于解决较为复杂的疑问。

赠送长期文字答疑，用于解决简单的、零散的疑问。

答疑服务仅限直接购买人本人使用。答疑服务不能转让、不能共享。用户需要保留购买凭证截图；丢失购买凭证的，本店可以不提供答疑服务；不是从本店购买的，而是从其他渠道获得代码包的，不提供答疑服务。

本商品技术含量较高，本店不保证能在限时内解答所有疑问。有需要的用户，可以付费购买额外的语音答疑服务。

本店可提供少量的数据判读服务。但是大量的数据判读服务需要额外收费。较为复杂的数据处理，或者定制化修改代码，可能需要额外收费。

上述服务可能需要排队，本店不能保证服务的实时性。

3.4. 联系方式

西安市雁塔区雾膜软件开发站

销售、答疑、定制开发：

微信：（扫码）

雾膜软件



电子邮箱：braun@wmsoft.wang

网站：<http://wmsoft.xyz>